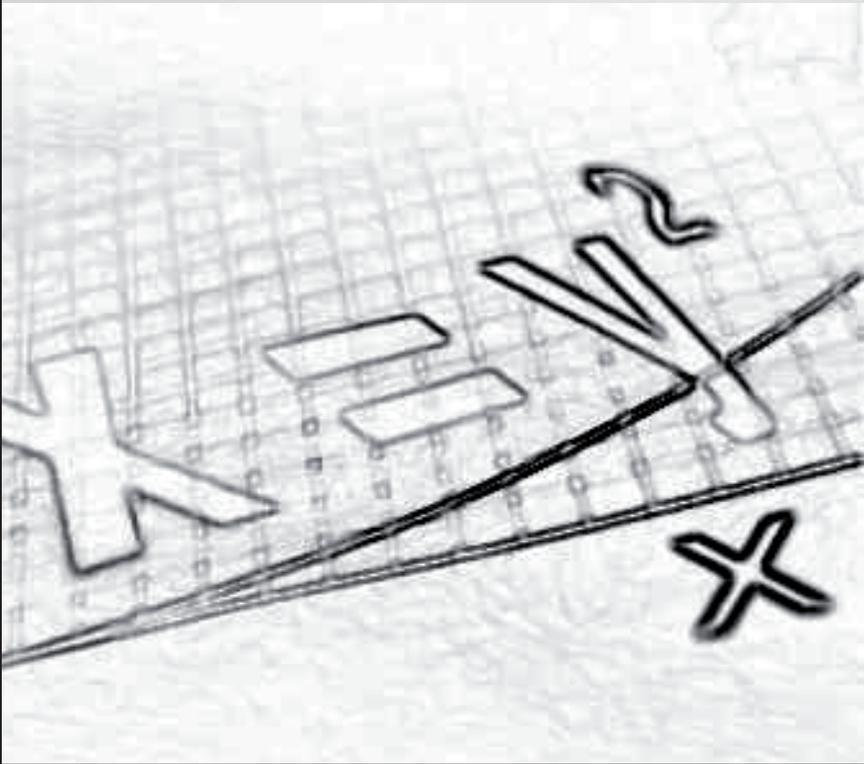


ISBN: 978-958-8943-16-9

ECUACIONES LINEAL Y CUADRÁTICA

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA LUIS AMIGÓ
FONDO EDITORIAL



FUNDACIÓN
UNIVERSITARIA



GABRIEL JAIME
POSADA HERNÁNDEZ

ECUACIONES LINEAL Y CUADRÁTICA

GABRIEL JAIME POSADA HERNÁNDEZ
Docente Departamento de Ciencias Básicas
Facultad de Ingenierías

Medellín, 2012

515.252 P855

Posada Hernández, Gabriel Jaime

Ecuaciones : lineal y cuadrática / Gabriel Jaime Posada Hernández ; aportaron a la investigación Mauricio López Bonilla y Rafael Ángel Álvarez Jiménez. -- Medellín : FUNLAM, 2012. -- (Matemáticas básicas).

26 p.

ISBN EDICIÓN IMPRESA: 978-958-8399-53-9

ISBN EDICIÓN DIGITAL: 978-958-8943-16-9

ECUACIONES

López Bonilla, Mauricio ; Álvarez Jiménez, Rafael Ángel

863 C744 2011

MATEMÁTICAS BÁSICAS

ECUACIONES LINEAL Y CUADRÁTICA

© Fundación Universitaria Luis Amigó

Transversal 51A 67 B 90. Medellín, Antioquia, Colombia

Tel: (574) 448 76 66 (Ext. 9711). Departamento de Fondo Editorial

www.funlam.edu.co

fondoeditorial@funlam.edu.co

ISBN EDICIÓN IMPRESA: 978-958-8399-53-9

ISBN EDICIÓN DIGITAL: 978-958-8943-16-9

Fecha de edición impresa: 27 de agosto de 2012

Fecha de edición digital: 12 de octubre de 2016

Autor:

Gabriel Jaime Posada Hernández

Corrección de estilo:

Rodrigo Gómez Rojas

Editorial:

Fundación Universitaria Luis Amigó

Coordinadora de Fondo Editorial:

Carolina Orrego Moscoso

Diagramación y diseño:

Carlos Hernando Zapata Sepúlveda

Hecho en Medellín–Colombia / Made in Medellín – Colombia

Financiación realizada por La Federación de Universidades Católicas y por la Fundación Universitaria Luis Amigó.

Los autores son moral y legalmente responsables de la información expresada en este libro, así como del respeto a los derechos de autor. Por tanto, éstos no comprometen en ningún sentido a la Fundación Universitaria Luis Amigó.

Se permite la reproducción parcial del contenido para efectos académicos y/o de investigación, siempre y cuando no se utilice con fines comerciales, se cite al autor y se den los créditos a la Funlam como institución editora. Prohibida la reproducción total, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin autorización escrita de la Fundación Universitaria Luis Amigó.



El libro *Matemáticas Básicas Ecuaciones Lineal y Cuadrática*, publicado por la Fundación Universitaria Luis Amigó, se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional.

Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden encontrarse en <http://www.funlam.edu.co/modules/fondoeditorial/>

APORTARON A LA INVESTIGACIÓN

Docentes

Fundación Universitaria Luis Amigó:
Gabriel Jaime Posada Hernández
Mauricio López Bonilla

Universidad de Medellín:
Rafael Ángel Álvarez Jiménez

Estudiantes Auxiliares

Fundación Universitaria Luis Amigó
Jaime Esteban Lozano Vaca
Daniel Salazar Yarce

CONTENIDO

Presentación

Introducción

1.1 ECUACIÓN LINEAL-ECUACIÓN DE LA LÍNEA RECTA..	11
1.1 Pendiente de la recta	11
1.2 Ecuación de la línea recta	14
1.3 Rectas paralelas y perpendiculares	14
1.4 Ejemplos típicos de aplicación de la línea recta	16
1.5 Ejercicios de aplicación sobre línea recta	17
2. ECUACIÓN CUADRÁTICA	21
2.1 Conceptos generales	21
2.2 Ejemplos típicos sobre la ecuación cuadrática	21
2.3 Ejercicios de aplicación sobre la ecuación cuadrática.	22
Referencias	24

PREFACIO

Las cartillas Matemáticas Básicas han sido elaboradas por el equipo de docentes vinculados al Departamento de Ciencias Básicas de la Fundación Universitaria Luis Amigó, como herramienta útil para aquellos estudiantes que recién inician estudios superiores.

Las Ciencias Básicas y, en particular las matemáticas, se han constituido en uno de los nuevos retos y alternativas para la formación de profesionales capaces de intervenir problemáticas sociales contemporáneas, desde la aplicación de la ciencia y la tecnología con criterios éticos y de calidad.

“Matemáticas Básicas”, como colección. Las cartillas surgen en el equipo de docentes en respuesta a la necesidad de ofrecer alternativas al proceso de formación matemática del estudiante y que permita superar inquietudes presentadas en las aulas de clase o consultas realizadas, especialmente en aquellas personas deseosas de tener las oportunidades que brinda la educación superior.

La metodología empleada obedece a un proceso didáctico y comprensible para el estudiante. Inicialmente se presentan los conceptos básicos por medio de fórmulas matemáticas, poste-

riormente se ilustra el desarrollo de ejercicios típicos y finalmente se ofrece un número determinado de ejercicios como propuesta para la consolidación conceptual por parte del estudiante.

Seguros de que en dicho material se encuentran los referentes necesarios para el desarrollo de un proceso formativo en ciencias básicas con calidad, le deseamos éxitos en este nuevo reto de su formación profesional.

INTRODUCCIÓN

Como lo revelan algunas tablas de arcilla que datan del año 2100 a. C., las ecuaciones lineales y cuadráticas fueron estudiadas por los babilonios. Son de gran importancia porque con ellas se pueden representar numerosos problemas en diferentes áreas de la Ingeniería y en otras ciencias, de tal forma que se pueda calcular un valor desconocido y relevante del problema, por medio de datos que sí son conocidos.

Actualmente, la mayoría de las disciplinas requieren de cálculos basados en modelos matemáticos estructurados a partir de la observación de los fenómenos naturales, sociales, económicos, financieros, entre otros, convirtiéndose así las ecuaciones lineal y cuadrática en la base fundamental de los modelos científicos que expresan el comportamiento de los fenómenos analizados de forma particular.

Coherente con las políticas establecidas por el Ministerio de Educación Nacional mediante el ICFES, la cartilla “Ecuaciones Lineal y Cuadrática” contribuye al fortalecimiento de la competencia “Razonamiento Cuantitativo” del componente genérico de la prueba Saber Pro. Igualmente, hace parte de los productos

considerados en la ejecución del proyecto “Análisis comparativo de la competencia genérica Razonamiento Cuantitativo de la prueba Saber Pro y su relación con los cursos ofrecidos por el Departamento de Ciencias Básicas en los programas de pregrado de la Funlam y la UdeM”¹, adscrito a la línea de investigación en Matemáticas Aplicadas y al grupo de investigación en Sistemas de Información y Sociedad del Conocimiento -SISCO-.

En la cartilla se presenta la ecuación lineal con sus respectivos comportamientos según la pendiente, así como la relación entre dos rectas cuando son paralelas o perpendiculares. Para la ecuación cuadrática se presentan las dos formas de solución: por factorización y por fórmula general. Para ambos tipos de ecuaciones se ilustran ejemplos típicos y se proponen ejercicios de aplicación.

1 Proyecto ejecutado durante el período febrero-noviembre de 2012. Su equipo de trabajo: Gabriel Jaime Posada Hernández (Investigador principal Funlam), Mauricio López Bonilla (Coinvestigador Funlam), Rafael Ángel Álvarez Jiménez (Coinvestigador UdeM), Jaime Esteban Lozano Vaca (Estudiante Auxiliar Funlam) y Daniel Salazar Yarce (Estudiante Auxiliar Funlam).

1. ECUACIÓN LINEAL-ECUACIÓN DE LA LÍNEA RECTA

1.1 Pendiente de la recta

La función lineal está dada por la ecuación $y=mx + b$, donde m es la pendiente de la recta y b el intercepto con el eje y .

La pendiente de la recta es calculada a partir de dos puntos: $P(x_0, y_0)$ y $Q(x_1, y_1)$ mediante la ecuación.

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

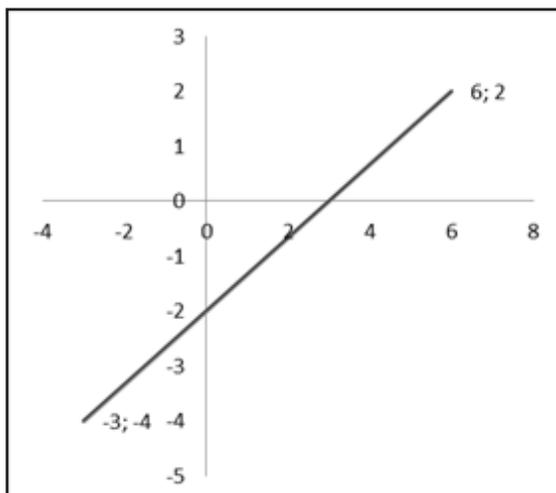
Esto es:

$$m = \frac{\text{cambio vertical (elevación)}}{\text{cambio horizontal (desplazamiento)}}$$

Es el grado (*medida*) de inclinación de una recta, la razón de cambio en y con respecto al cambio en x .

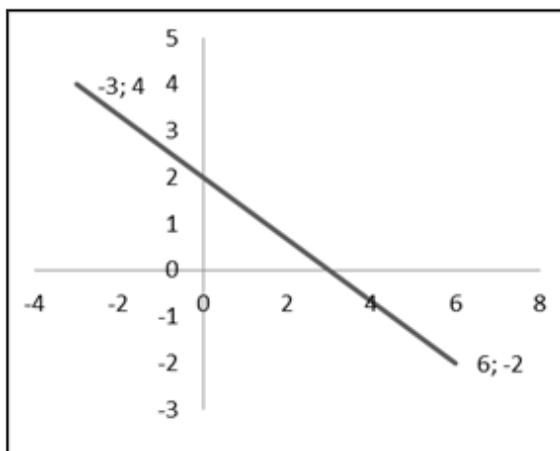
En las gráficas 1 a 4 se puede observar la interpretación geométrica de la pendiente de una recta, a partir de los siguientes casos:

Gráfica 1. Pendiente positiva – Recta ascendente



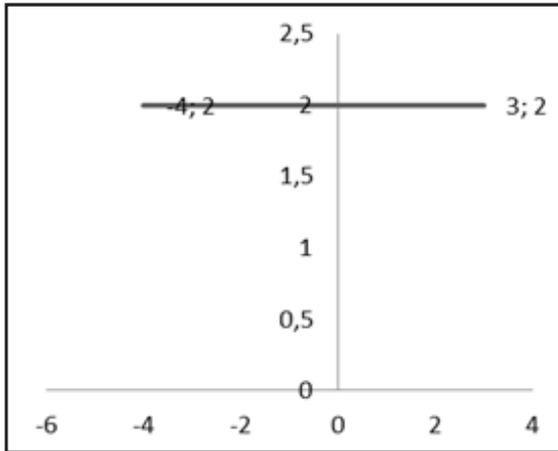
Fuente: elaboración propia

Gráfica 2. Pendiente negativa – Recta descendente



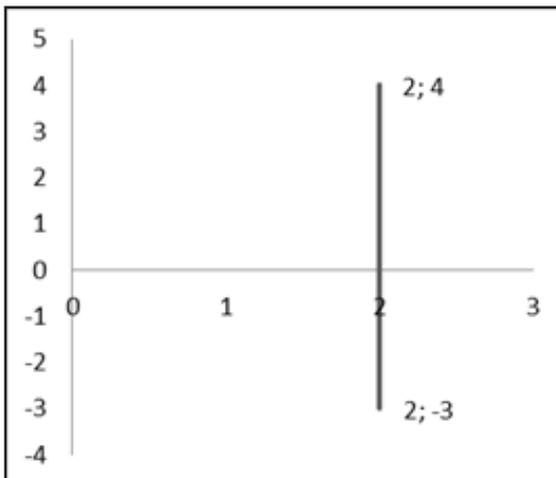
Fuente: elaboración propia

Gráfica 3. Pendiente igual a cero—Recta horizontal



Fuente: elaboración propia

Gráfica 4. Pendiente no definida—Recta vertical



Fuente: elaboración propia

Si las coordenadas x_0 y x_1 son iguales ($x_0 = x_1 = a$), la pendiente no existe y la línea recta será vertical con ecuación $x = a$. De igual forma, si las coordenadas y_0 y y_1 son iguales ($y_0 = y_1 = b$), la pendiente es igual a cero y la línea recta será horizontal con ecuación $y = b$.

1.2 Ecuación de la línea recta

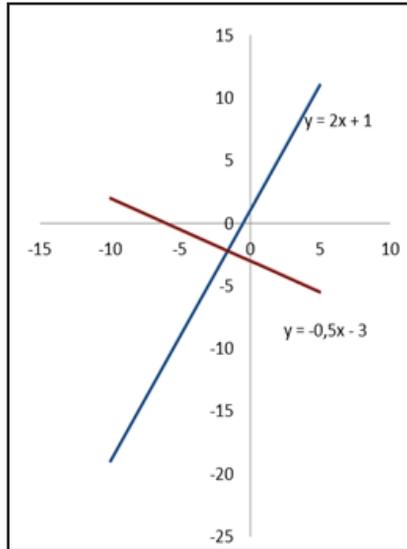
La ecuación de la línea recta se puede construir de dos formas:

- a) Conociendo la pendiente m y un punto $P(x_0, y_0)$.
- b) A partir de dos puntos, calculando la pendiente m y usando la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$. En este caso es indiferente usar como punto conocido $P(x_0, y_0)$ ó $Q(x_1, y_1)$.

1.3 Rectas paralelas y perpendiculares

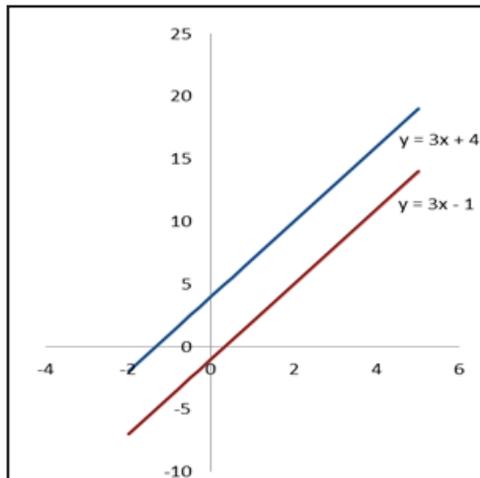
Si se tienen dos rectas L1: $y = m_1x + b$ y L2 $y = m_2x + b$, entonces L1 es Paralela a L2 si $m_1 = m_2$. Serán perpendiculares si $m_1 * m_2 = -1$

Gráfica 5. Líneas perpendiculares



Fuente: elaboración propia

Gráfica 6. Líneas paralelas



Fuente: elaboración propia

1.4 Ejemplos típicos de aplicación de la línea recta

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(4,1) y Q(7,10).

Inicialmente se calcula la pendiente: $m = \frac{10 - 1}{7 - 4} = 3$ y se toma cualquiera de los puntos conocidos P ó Q, en este caso se toma el punto P(4,1).

Luego, la ecuación de la recta se calcula usando la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$y - 1 = 3(x - 4)$$

$$y - 1 = 3x - 12$$

$$y = 1 + 3x - 12$$

$$y = 3x - 11$$

Ejemplo 2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2,8) y tiene pendiente 6.

En este caso se conoce el punto y la pendiente, por tanto se utiliza la ecuación

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 8 = 6(x - 2)$$

$$y - 8 = 6x - 12$$

$$y = 8 + 6x - 12$$

$$y = 6x - 4$$

1.5. Ejercicios de aplicación sobre línea recta

1. Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.

- a) $(4,-2)$, $(-6,3)$ Respuesta: $m = -1/2$
- b) $(2,-4)$, $(3,-4)$ Respuesta: $m = 0$
- c) $(5,3)$, $(5,-8)$ Respuesta: m no existe
- d) $(0,-6)$, $(3,0)$ Respuesta: $m = 2$
- e) $(5,-2)$, $(4,-2)$ Respuesta: $m = 0$

2. Encontrar la ecuación de las líneas rectas que satisfacen dadas.

- a) Pasa por el punto $(2,1)$ y tiene pendiente 5.
Respuesta: $y = 5x - 9$
- b) Pasa por el punto $(3,4)$ y tiene pendiente cero.
Respuesta: $y = 4$
- c) Tiene pendiente -2 y ordenada al origen 5.
Respuesta: $y = -2x + 5$
- d) Pasa por $(1,3)$ y es paralela a la recta $2x - y + 3 = 0$
Respuesta: $y = 2x + 1$
- e) Pasa por $(2,1)$ y es perpendicular a la recta $x + y = 0$ Respuesta: $y = x - 1$
- f) Pasa por $(2,-3)$ y no tiene pendiente.
Respuesta: $x = 2$
- g) Pasa por los puntos $(3,-1)$ y $(4,5)$.
Respuesta $y = -2x - 19$

3. Determine la pendiente y la ordenada al origen de las siguientes rectas:

a) $2x = 5 - 3y$. Respuesta: *Pendiente = $-2/3$. Ordenada al origen = $5/3$*

b) $3x + 2y = 6$. Respuesta: *Pendiente = $-3/2$. Ordenada al origen = 3*

c) $2(x - 3) - 4(y + 2) = 8$. Respuesta: *Pendiente = $1/2$. Ordenada al origen = $-11/2$*

4. Determine si las rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos:

a) $y = 7x + 2$, $y = 7x - 3$ Respuesta: *son paralelas*

b) $y = 5x + 2$, $-3x + y - 5 = 0$ Respuesta: *ninguna de las dos*

c) $x + 2y + 1 = 0$, $y = 2x$ Respuesta: *son perpendiculares*

d) $x + 2y = 0$, $x + y - 4 = 0$ Respuesta: *ninguna de las dos*

5. **(Ecuación de demanda)**. Suponga que los clientes demandarán 40 unidades de un producto cuando el precio es de \$12 por unidad, y 25 unidades cuando el precio es de \$18 cada una. Halle la ecuación de demanda suponiendo que es lineal. Determine el precio por unidad cuando se requieren 30 unidades.

Respuesta: $p = -\frac{2}{5}q + 28$, precio por unidad = 16

6. **(Ecuación de oferta)**. Un fabricante de refrigeradores produce 3000 unidades cuando el precio es de \$940 y 2200 unidades cuando el precio es \$740. Suponga que el precio

(p) y la cantidad (q) producidas están relacionadas de manera lineal. Determine la ecuación de oferta.

Respuesta: $p = \frac{1}{4}q + 1690$

7. (**Ecuación de costo**). El costo de fabricar 100 cámaras a la semana es de \$700 y el de 120 cámaras a la semana es de \$800. Determine la ecuación de costo suponiendo que es lineal. ¿Cuáles son los costos fijos y variables por unidad?

Rta: $p = 5q + 200$, costos fijos = 200, costos variables por unidad = 5

2. ECUACIÓN CUADRÁTICA

2.1. Conceptos generales

Una ecuación cuadrática está representada por $ax^2 + bx + c = 0$, con a , b y c constantes y $a \neq 0$.

La ecuación cuadrática puede resolverse por factorización o por la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$$

2.2. Ejemplos típicos sobre la ecuación cuadrática

Ejemplo 1. Resolver por medio de factorización la ecuación

$$2x^2 - 7x + 6 = 0$$

Teniendo en cuenta que es un trinomio, se debe analizar si es cuadrado perfecto. En este caso no lo es, dado que el segundo término ($7x$) no es el doble producto de la raíz cuadrada del primer término por el tercero.

La factorización del trinomio $2x^2 - 7x + 6$ debe realizarse por tanteo, dando como resultado $(2x - 3)(x - 2)$.

La ecuación cuadrática $2x^2 - 7x + 6 = 0$ queda convertida en $(2x - 3)(x - 2) = 0$.

Por lo tanto, cada factor debe ser igualado a cero para encontrar los valores que satisfacen la ecuación:

$$(2x - 3) = 0 \text{ y } (x - 2) = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ y } x = 2$$

Luego de obtener los valores para la variable x , se debe verificar la solución en las ecuaciones generales.

Ejemplo 2. Resolver por medio de la fórmula general

$$4x^2 - 17x + 15 = 0.$$

Al identificar los coeficientes de la ecuación se observa que $a = 4$, $b = 17$ y $c = 15$

$$\text{Por tanto, } x = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4(4)(15)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{17 \pm 7}{8}$$

$$\text{La solución es: } x = \frac{17 \pm 7}{8} = \frac{24}{8} = 3 \text{ y } x = \frac{17 - 7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

2.3. Ejercicios de aplicación sobre la ecuación cuadrática

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $5x^2 - \frac{7}{2}x = \frac{1}{2}x + 1$ Respuesta: $x = 1$ $x = -\frac{1}{5}$

2. $2x(x + 1) = x^2 - 1$ Respuesta: $x = -1$

3. $(x+1)^2 = 2x^2$ Respuesta: $x = 1 + \sqrt{2}$ $x = 1 - \sqrt{2}$

4. $3x(2x-5) = -4x-3$ Respuesta: $x = \frac{1}{3}$ $x = \frac{3}{2}$

5. $3x^2 = 5x-3$ Respuesta: *No tiene solución en los números reales*

6. $\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x = x-1$ Respuesta: $x = \frac{4 + \sqrt{10}}{2}$ $x = \frac{4 - \sqrt{10}}{2}$

7. $(3x+5)(2x-3) = -8$ Respuesta: $x = -\frac{7}{6}$ $x = 1$

Referencias

Arya, J. y Lardner, R. (2002). *Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía*. (4ª ed.). México: Pearson Educación.

Haeussler, E. y Richard, P. (1997). *Matemáticas para la Administración, la Economía, Ciencias Sociales y de la vida*. (8ª ed.). México: Pearson, Prentice Hall.

Haeussler, E. y Richard, P. (2003). *Matemáticas para Administración y Economía*. (10ª ed.). México: Pearson Educación.

Tan, S. T. (2002). *Matemáticas para Administración y Economía*. (2ª ed.). México: Thomson Learning.

Bibliografía sugerida

Se presenta la siguiente lista como recomendaciones para profundizar el tema:

Molina, E. (s.f.). *Ecuación de una recta parte 1*. Villa del rosario, Norte de Santander, Colombia. Recuperado el 30 de abril de 2012 en:

<http://www.youtube.com/watch?v=Sgp5yetV7jA&feature=relmfu>

Molina, E. (s.f.). *Ecuación de una recta parte 2*. Villa del rosario, Norte de Santander, Colombia. Recuperado el 3 de marzo de 2012 en:

http://www.youtube.com/watch?v=cOJEL2LC_xU&feature=relmfu

Molina, E. (s.f.). *Pendiente de una recta*. Villa del rosario, Norte de Santander, Colombia. Recuperado el 3 de marzo de 2012 en:

<http://www.youtube.com/watch?v=YNvoFi9ndfs&feature=relmfu>

Molina, E. (s.f.). *Rectas paralelas y perpendiculares*. Villa del rosario, Norte de Santander, Colombia. Recuperado el 5 de marzo de 2012 en:

<http://www.youtube.com/watch?v=RFBMG7IWIMM&feature=endscreen&NR=1>

Sánchez, A. (s.f.). *Solución de ecuaciones cuadráticas – fórmula general*. Departamento de Matemáticas UPRA. Recuperado el 7 de mayo de 2012 en:

<http://www.youtube.com/watch?v=187VcMixOOY&feature=related>

Navarro, Estella. (s.f.). *Solución de ecuaciones de segundo grado – factorización*. Recuperado el 8 de mayo de 2012 en:

<http://www.youtube.com/watch?v=u28QxfESe7g&feature=endscreen&NR=1>

SOBRE EL AUTOR

Gabriel Jaime Posada Hernández

Ingeniero Forestal de la Universidad Nacional de Colombia, Especialista en Gestión Pública de la Escuela Superior de Administración Pública ESAP y Magister en Estudios Urbano-Regionales de la Universidad Nacional de Colombia.

Ha sido docente de varias Instituciones de Educación Superior, entre ellas: Universidad Nacional de Colombia, Universidad de Medellín, Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid, Escuela Superior de Administración Pública ESAP, Instituto Tecnológico Metropolitano, Fundación Universitaria Católica del Norte y Fundación Universitaria Autónoma de las Américas.

Actualmente se desempeña como Docente Asociado en el Departamento de Ciencias Básicas de la Fundación Universitaria Luis Amigó.

Contacto: Gabriel.posadahe@amigo.edu.co